Beispiel 4: LGS mit 3 Gleichungen und 2 Variablen

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 6x_1 + 4x_2 &= -7 \end{aligned}\right\} \cdot(-2),\ \cdot(-3) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= -6 \\ x_2 &= -19 \end{aligned}\right\} \lightning$$

WIDERSPRUCH $\Rightarrow$ keine Lösung

Beispiel 5: LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Vertauschung der Reihenfolge der Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 14 \end{aligned}\right\} \cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ -x_2 - x_3 &= -5 \\ -2x_3 &= -4 \end{aligned}\right\} \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

Stufenform

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ -x_2 - x_3 &= -5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} +;\ -$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & & = 7 \\ & -x_2 & & = -3 \\ & & x_3 & = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & & & = 1 \\ & -x_2 & & = -3 \\ & & x_3 & = 2 \end{array}\right\} \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 3 \\ x_3 & = 2 \end{array}\right\} \quad \text{Lösung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

also genau ein Lösungsvektor
(eindeutige Lösung)

Def. 2.1 LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM (LGS)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$ mit Primzahl p, ...).
Zudem seien $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq 1$.

Ein System aus m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (*)$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für $i \in \{1,2,\dots,m\}$ (Zeilenindex) und $j \in \{1,2,\dots,n\}$ (Spaltenindex) sowie $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ heißt (inhomogenes) lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{K}$).

Falls die „rechte Seite" nur aus Nullen besteht, also falls $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$ gilt, so ist von einem homogenen linearen Gleichungssystem die Rede.

a_{ij} ist der Vorfaktor in der i-ten Gleichung (Zeile) vor der j-ten Variable x_j (Spalte)

<u>Merkregel:</u>

a_{ij}

i: ZEILE ZUERST

j: SPALTE SPÄTER

Ein (Spalten-)Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n := \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ mal}}$$

mit Lösungen für $x_1, x_2, \dots, x_n$ heißt Lösungsvektor oder kurz Lösung des LGS $(*)$.

Die bisherigen Beispiele bestätigen:

Satz 2.2

Ein LGS über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ besitzt entweder

(i) keine Lösung,

(ii) genau eine Lösung (gemeint ist damit genau ein Lösungsvektor)

(iii) unendlich viele Lösungen (d.h. Lösungsvektoren).

Satz 2.3

Ein <u>homogenes</u> LGS

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right\}$$

besitzt mindestens eine Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (\text{Nullvektor des } \mathbb{K}^n)$$

$$=: \vec{0}$$

Diese Lösung wird auch als „triviale" Lösung bezeichnet.

2.2 Matrix-Vektor-Notation

Def. 2.4 MATRIX-SCHREIBWEISE

Ein LGS der Art (*) lautet in der Matrix-Vektor-Notation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

wird als Produkt betrachtet.

„$\underbrace{m \times n}$-Matrix" gesprochen „m kreuz n-Matrix"

Format: m = Zeilenzahl, n = Spaltenzahl
(„Zeilen zuerst, Spalten später")

Die Matrix kann durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} =: (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

kürzer notiert werden.

A wird auch als „Koeffizientenmatrix" des LGS (*) bezeichnet.

Die Unbekannten $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

sowie die Einträge der rechten Seite von (*)

$$\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

werden als Spaltenvektoren aufgefasst.
Das LGS lautet daher in kürzester Darstellung:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Plural von Matrix

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ wird mit den Symbolen

$$M(\underbrace{m \times n}_{\text{Format}}, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K}^{m \times n}, \quad Mat_{m \times n}(\mathbb{K}), \ldots$$

bezeichnet.

Def. 2.5 ELEMENTARE UMFORMUNGEN

Gegeben sei ein LGS

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } A \in M(m \times n, \mathbb{K}),\ \vec{x} \in \mathbb{K}^n,\ \vec{b} \in \mathbb{K}^m.$$

Die „Nettodaten" dieses LGS können noch kürzer in einer „Tableau-Matrix" notiert werden:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

$m \times (n+1)$-Matrix

Um das LGS zu lösen, werden 3 Umformungsarten durchgeführt; die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht:

Typ I: Addition des Vielfachen einer Zeile (Gleichung) zu einer <u>anderen</u> Zeile

Typ II: Vertauschen von Zeilen (Gleichungen)

Typ III: Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$.

Beispiel: LGS aus $m=3$ Gleichungen und $n=3$ Unbek.:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 13 \\ 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &=& 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 9 \end{array}\right\}$$

in Matrix-Vektor-Notation: $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 3\text{-Matrix}}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

in Tableauform:

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & 4 & 0 & 14 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Typ II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & 4 & 0 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Typ I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\tfrac{1}{2}) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Typ III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot 1,\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Typ I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 2 \\ \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{Typ I}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdot(-1)$

$\xrightarrow{\text{Typ III}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

„Hauptdiagonale"

Lösung ist ablesbar:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Begr.: Dieses „Endtableau" steht für das LGS

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 \cdot x_1 & = & 1 \\ 1 \cdot x_2 & = & 3 \\ 1 \cdot x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Dieses Verfahren heißt „Gaußsches Eliminationsverfahren" oder Gauß-Verfahren oder „Gauß-Algorithmus".

Bem.: Hat eine Matrix genauso viele Zeilen wie Spalten, so wird sie als „quadratische Matrix" bezeichnet.

Die Menge aller quadratischen Matrizen aus n Zeilen (und damit aus n Spalten) und Einträgen aus $\mathbb{K}$ kann mit

$$M(n, \mathbb{K}) := M(n \times n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n}$$

bezeichnet werden.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right\}$$

als Tableau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \cdot(-1), \cdot(-2)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dieses Tableau steht für das LGS

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 &= 1 \\ -2x_2 &= 1 \end{array}\right\} \leftarrow$$

3. Gleichung $\Leftrightarrow$ 2. Gleichung
also keine neue Information.

Wir haben es daher nur mit zwei Gleichungen zu tun:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 &= 1 \end{array}\right\}$$

Dieses LGS ist unterbestimmt.
Es gibt daher unendlich viele Lösungen.